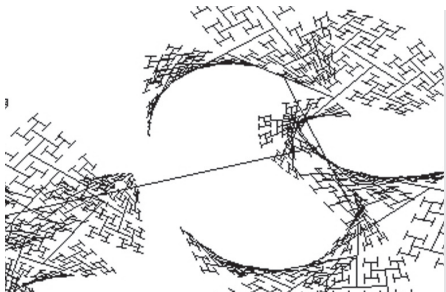


REVISTA Universidad EAFIT
Vol. 42. No. 146. 2006. pp.102-116

Tipos de razonadores



Manuel Sierra Aristizábal

Profesor, departamento de Ciencias Básicas,
Universidad EAFIT.
msierra@eafit.edu.co

Recepción: 29 de abril de 2007 | Aceptación: 06 de junio de 2007

Resumen

Se presentan como extensiones del cálculo proposicional clásico, las jerarquías de sistemas deductivos SCR-(n+1) y CP-n con $n \geq 0$. SCR-n es el *sistema de creencias para los razonadores de tipo n* y CP-n es el *cálculo proposicional asociado a los razonadores de tipo n*. Los teoremas de los sistemas SCR-n son interpretados como las creencias de un razonador de tipo-n, mientras en los sistemas CP-n se interioriza la noción de creencia mediante el operador [R], en el siguiente sentido: X es una creencia de un razonador tipo-n (X es un teorema de SCR-n) sí y solamente si [R]X es un teorema de CP-n. Cuando se hace la unión de los sistemas de creencias se produce el sistema SCR- ω , el cual coincide con el *sistema de lógica modal K*, por lo que la jerarquía SCR-n resulta ubicada entre el cálculo proposicional clásico y el sistema modal K. La forma como se construyen los sistemas garantiza que un razonador de tipo-(n+1) sepa que es de tipo-n en el siguiente sentido: en el sistema SCR-(n+1) se tienen como teorema, además de los teoremas de SCR-n, la creencia en dichos teoremas; y el razonador de tipo-(n+1) sabe que aplica las reglas de inferencia que utiliza un razonador de tipo-n. Como además un razonador de tipo-n no siempre puede saber que es de tipo-n, resulta que los razonadores de la jerarquía no son autoconcientes. La autoconciencia sólo se puede garantizar al extender el sistema SCR- ω al sistema modal K4.

Palabras Clave

Razonador
Creencia
Sistema deductivo
Jerarquía
Modal

Types of reasoners

Abstract

These are presented as extensions of classic propositional calculus, the hierarchies of deductive systems SCR-(n+1) and CP-n with $n \geq 0$. SCR-n is the belief system of type-n reasoners and CP-n is the associated propositional calculus for type-n reasoners. The theorems of SCR-n systems are interpreted as the beliefs of type-n reasoners. In CP-n systems the belief notion is formalized by using the [R] operator, in the following sense: X is a belief of a type-n reasoner (X is a SCR-n theorem) if and only if [R] X is a CP-n theorem. The junction of these systems produces the SCR-w system, which agrees with the K modal logic system, therefore, the SCR-n hierarchy is located between the classic propositional calculus and K modal system. The way in which the systems are built guarantees that a type (n+1) system knows that it is of type-n in the following sense: in SCR-(n+1) system there is a theorem, besides the SCR-n theorems, the belief in such theorems, and the type (n+1) knows that it applies the inference rules used by a type-n reasoner. Since a type-n reasoner does not always know that it is of type-n, reasoners of the hierarchy are not self-conscious. Self-consciousness can only be guaranteed by extending the SCR-w system to the modal K4 system.

Key words

Reasoner
Belief
Deductive system
Hierarchies
Modal logic

Introducción

Smullyan (1995) presenta algunos tipos de razonadores: un razonador es de *tipo 1* si cree todas las tautologías y razona con *modus ponens*, es decir, si el razonador cree X y cree $X \rightarrow Y$ entonces el razonador cree Y; un razonador es de *tipo 2* si es de tipo 1 y cree todas las proposiciones de la forma $(BX \wedge B(X \rightarrow Y)) \rightarrow BY$, donde BX se lee el razonador cree X; un razonador es *normal* si para cada proposición X, si cree X entonces cree que cree X; un razonador es de *tipo 3* si es normal y es de tipo 2; un razonador es de *tipo 4* si es de tipo 3 y cree todas las proposiciones de la forma $BX \rightarrow BBX$. Los razonadores de tipo 1 son deductivamente caracterizados por el cálculo proposicional clásico, los razonadores de tipo 3 por el sistema modal K presentado por Goldblatt (1992), y los razonadores de tipo 4 por el sistema modal K4.

Como puede ocurrir que el razonador crea algo que es falso, entonces se define un operador de

conocimiento de la siguiente forma: el razonador sabe X si el razonador cree X y X es cierto, es decir, $CX \leftrightarrow (X \wedge BX)$, donde CX se lee el razonador sabe X. Observar que los razonadores de tipo 1 razonan con *modus ponens*, por lo que es cierta la proposición $(BX \wedge B(X \rightarrow Y)) \rightarrow BY$, pero en general un razonador de tipo 1 no cree esta proposición, es decir, un razonador de tipo 1 no sabe que razona con *modus ponens*, por lo tanto no sabe que es de tipo 1. Mientras que un razonador de tipo 2, al creer las proposiciones de la forma $(BX \wedge B(X \rightarrow Y)) \rightarrow BY$, sabe que razona con *modus ponens*, por lo que los razonadores de tipo 2 tienen cierto autoconocimiento que no está presente en los razonadores de tipo 1.

Smullyan dice que un razonador *cree que es de tipo 1* si cree todas las proposiciones de la forma BX, donde X es una tautología, y cree todas las proposiciones de la forma $(BX \wedge B(X \rightarrow Y)) \rightarrow BY$. Si también cree todas las proposiciones de la forma $B[(BX \wedge B(X \rightarrow Y)) \rightarrow BY]$, entonces el razonador cree que es de *tipo 2*. Si también cree todas las

proposiciones de la forma $BX \rightarrow BBX$, entonces el razonador cree que es de *tipo 3*. Si también cree todas las proposiciones de la forma $B[BX \rightarrow BBX]$, entonces el razonador cree que es de *tipo 4*. Para cada uno de estos tipos, se dice que un razonador sabe que es de ese tipo si cree que es de ese tipo y realmente lo es. Este autor muestra que: un razonador que sabe que es de tipo 1 es de tipo 2, y que todo razonador de tipo 3 sabe que es de tipo 2, aunque no sabe necesariamente que es de tipo 3. También se tiene que un razonador sabe que es de tipo 4 sí y sólo si sabe que es de tipo 3; además un razonador de tipo 4 sabe que es de tipo 4, lo cual significa que todo lo que se pueda probar sobre los razonadores de tipo 4 utilizando únicamente la lógica proposicional, todo razonador de tipo 4 puede demostrarlo sobre sí mismo, dado que también conoce la lógica proposicional y sabe que es de tipo 4.

Por otro lado, los sistemas deductivos construidos como extensiones del sistema modal K, utilizando operadores de creencia y conocimiento, son conocidos como *lógicas doxásticas* y *lógicas epistémicas* respectivamente (Lenzen, 1978), y son de interés en inteligencia artificial, en lo que respecta al modelamiento del comportamiento (razonamiento) de agentes inteligentes, tal como lo menciona Freund (1995), además cualquier semántica para estos sistemas deductivos debe justificar el teorema $B(X \rightarrow Y) \rightarrow (BX \rightarrow BY)$ y la regla de inferencia 'de X se sigue BX', por lo que esta semántica obliga a concebir al agente como una entidad capaz de conocer todas las consecuencias lógicas de su conocimiento, lo cual la hace inadecuada como un modelo de agentes tales como seres humanos o sistemas computacionales con limitaciones de espacio y tiempo. Este problema, denominado de la *omnisciencia lógica*, si bien ha estimulado el desarrollo de semánticas alternativas, aún continua abierto.

En este trabajo se presentan como extensiones del cálculo proposicional clásico, las jerarquías de sistemas deductivos SCR- $(n+1)$ y CP- n con $n \geq 0$. SCR- n es el *sistema de creencias para los razonadores de tipo n* y CP- n es el *cálculo proposicional asociado a los razonadores de tipo n*. Los teoremas de los sistemas SCR- n son interpretados como las creencias de un razonador de tipo- n , mientras en los sistemas CP- n se interioriza la noción de creencia mediante el operador $[R]$, en el siguiente sentido: X es una creencia de un razonador tipo- n (X es un teorema de SCR- n) sí y solamente si $[R]X$ es un teorema de CP- n . Cuando se hace la unión de los sistemas de creencias resulta el sistema SCR- ω , el cual coincide con el *sistema*



de *lógica modal K*, por lo que la jerarquía SCR- n resulta ubicada entre el cálculo proposicional clásico y el sistema modal K. La forma como se construyen los sistemas, permite que un razonador de tipo- $(n+1)$ sepa que es de tipo- n pero no siempre puede saber que es de tipo- $(n+1)$. Lo anterior significa que los razonadores de la jerarquía no son autoconcientes. La autoconciencia sólo se puede garantizar al extender el sistema SCR- ω al sistema modal K4. En los sistemas SCR- n el problema de la omnisciencia lógica se encuentra limitado, puesto que estos sistemas carecen de la regla de inferencia 'de X se sigue [R]X' y en los teoremas del sistema el número de ocurrencias de operadores de creencia se encuentra limitado.

Sistemas Deductivos SCR- n y CP- n

El lenguaje de todos los sistemas de la jerarquías SCR- n ($n \geq 1$) y CP- n ($n \geq 0$) consta de los conectivos binarios \rightarrow , \vee , \wedge , \leftrightarrow ; y los conectivos unarios \sim , [R]. El conjunto de fórmulas del cálculo proposicional clásico CP es generado recursivamente a partir de un conjunto de fórmulas atómicas utilizando los conectivos de la siguiente forma:

1. Si A es una fórmula atómica entonces A es una fórmula
2. Si A es una fórmula entonces $\sim(A)$ es una fórmula
3. Si A y B son fórmulas entonces $(A) \rightarrow (B)$, $(A) \leftrightarrow (B)$, $(A) \vee (B)$ y $(A) \wedge (B)$ son fórmulas

El *sistema deductivo para el cálculo proposicional clásico* CP consta de los siguientes axiomas:

$$\text{Ax0.1 } A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$\text{Ax0.2 } (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$\text{Ax0.3 } A \rightarrow (A \vee B)$$

$$\text{Ax0.4 } B \rightarrow (A \vee B)$$

$$\text{Ax0.5 } (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$$

$$\text{Ax0.6 } (A \wedge B) \rightarrow A$$

$$\text{Ax0.7 } (A \wedge B) \rightarrow B$$

$$\text{Ax0.8 } (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C)))$$

$$\text{Ax0.9 } A \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$$

$$\text{Ax0.10 } A \vee \sim A$$

$$\text{Ax0.11 } (A \leftrightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$\text{Ax0.12 } (A \leftrightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$\text{Ax0.13 } (A \rightarrow B) \rightarrow [(B \rightarrow A) \rightarrow (A \leftrightarrow B)]$$

Como única *regla de inferencia* se tiene el *Modus Ponens* MP: de A y $A \rightarrow B$ se infiere B.

Los sistemas SCR- n *sistema de creencias para los razonadores de tipo-n* y CP- n *cálculo proposicional asociado a los razonadores de tipo-n*, se construyen de la siguiente manera:

CP-0 es un *cálculo proposicional clásico* CP.

Para $n \geq 0$, SCR- $(n+1)$ es el mismo sistema CP- n , es decir:

A es una fórmula de CP- $n \Leftrightarrow$ A es una fórmula de SCR- $(n+1)$

A es un axioma de CP- $n \Leftrightarrow$ A es un axioma de SCR- $(n+1)$

Para $n \geq 1$, CP- n es el mismo sistema SCR- n adicionando [R]A como axioma a cada axioma A, y representando internamente las reglas de inferencia primitivas, es decir:

A es una fórmula de SCR- $n \Rightarrow$ A y [R]A son fórmulas de CP- n

A, B son fórmulas de CP- $n \Rightarrow A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ y $\sim A$ son fórmulas de CP- n

A es un axioma de SCR- $n \Rightarrow$ A y [R]A son axiomas de CP- n

[R]($A \rightarrow B$) \rightarrow ([R]A \rightarrow [R]B) es un axioma de CP- n

Los sistemas tienen como única regla de inferencia el *modus ponens* MP.

El axioma [R]($A \rightarrow B$) \rightarrow ([R]A \rightarrow [R]B) será referenciado como MP[R]: *modus ponens* para el razonador.

Se dice que una fórmula A es un *teorema de SCR-n* (*teorema de CP-n*), o que *el razonador cree o acepta A* (A es cierto sobre el sistema SCR-n), denotado $\Vdash_n A$ ($\vdash_n A$), si y solamente si A es la última fórmula de una sucesión finita de fórmulas, tales que cada una de ellas es un axioma de SCR-n (CP-n) o se infiere de dos fórmulas anteriores utilizando la regla de inferencia MP. Cuando A es un teorema de CP-0, es decir de CP, se utiliza la notación $\vdash A$.

Si Γ es un conjunto de fórmulas, se dice que una fórmula A es un *teorema de SCR-n* (CP-n) *a partir de Γ* , denotado $\Gamma \Vdash_n A$ ($\Gamma \vdash_n A$), si y solamente si A es la última fórmula de una sucesión finita de fórmulas, tales que cada una de ellas es un axioma de SCR-n (CP-n) o un elemento de Γ o se infiere de dos fórmulas anteriores utilizando la regla de inferencia MP. Cuando A es un teorema de CP a partir de Γ , se utiliza la notación $\Gamma \vdash A$.

Representación Interna de la Creencia

En lo que sigue, cada vez que se hable de un razonador se entiende, a no ser que se diga lo contrario, que es un razonador de tipo-n.

Proposición 1 (*tipo-(n+1) es tipo-n*)

Los razonadores de tipo-(n+1) son razonadores de tipo-n.

$$\Vdash_n X \Rightarrow \Vdash_{n+1} X, \text{ para } n \geq 1$$

Además,

$$\vdash_n X \Rightarrow \vdash_{n+1} X, \text{ para } n \geq 0$$

$$\Vdash_t X \Rightarrow \Vdash_n X, \text{ para } n \geq t \geq 1$$

$$\vdash_t X \Rightarrow \vdash_n X, \text{ para } n \geq t \geq 0$$

Prueba: Supóngase que $\Vdash_n X$, se probará $\Vdash_{n+1} X$ haciendo inducción sobre la longitud de la demostración de X en SCR-n.

Paso base. La longitud de la demostración de X en SCR-n es 1, es decir X es un axioma de SCR-n, pero si X es un axioma de SCR-n entonces, por definición, X es axioma de CP-n, y de nuevo,

por definición, X es axioma de SCR-(n+1). Por lo tanto, $\Vdash_{n+1} X$.

Paso de inducción. Como hipótesis inductiva se tiene que si la longitud de la demostración de Y en SCR-n es menor que L entonces $\Vdash_{n+1} Y$.

Supóngase que la demostración de X en SCR-n tiene longitud L mayor que 1. Se tiene entonces que X es un axioma o X es consecuencia de pasos anteriores utilizando la regla de inferencia MP. En el primer caso, se procede como en el paso base resultando $\Vdash_{n+1} X$. En el segundo, se tienen para alguna fórmula A demostraciones de $A \rightarrow X$ y de A , ambas demostraciones de longitud menor que L . Si se aplica la hipótesis inductiva resultan $\Vdash_{n+1} A \rightarrow X$ y $\Vdash_{n+1} A$. Aplicando MP resulta $\Vdash_{n+1} X$.

Por el principio de inducción se ha probado que $\Vdash_n X \Rightarrow \Vdash_{n+1} X$.

Para la prueba de la segunda parte, observar que la primera puede ser escrita como $\Vdash_{n+1} X \Rightarrow \Vdash_{n+2} X$, para $n \geq 0$. Como el sistema SCR-(n+1) coincide con CP-n, entonces resulta que $\vdash_n X \Rightarrow \vdash_{n+1} X$, para $n \geq 0$. Para la prueba de la tercera parte, observar que de la primera se obtiene $\Vdash_t X \Rightarrow (\Vdash_t X, \Vdash_{t+1} X, \Vdash_{t+2} X, \dots)$, para $t \geq 1$, es decir, $\Vdash_t X \Rightarrow \Vdash_n X$, para $n \geq t \geq 1$. Para la prueba de la cuarta parte, observar que de la segunda se obtiene $\vdash_t X \Rightarrow (\vdash_t X, \vdash_{t+1} X, \vdash_{t+2} X, \dots)$, para $t \geq 0$, es decir, $\vdash_t X \Rightarrow \vdash_n X$, para $n \geq t \geq 0$.

Proposición 2 (*Aceptación de los teoremas clásicos*)

Los razonadores de tipo-n creen los teoremas del cálculo proposicional clásico CP.

$$\vdash X \Rightarrow \vdash_n [R]X, \text{ para } n \geq 1$$

Además,

$$\vdash X \Rightarrow \Vdash_n [R]X, \text{ para } n \geq 2$$

Prueba: Supóngase que $\vdash X$, se probará $\vdash_n [R]X$ haciendo inducción sobre la longitud de la demostración de X en CP.

Paso base. La longitud de la demostración de X en CP es 1, es decir X es un axioma de CP, pero si X es un axioma de CP entonces, por definición, X es axioma de SCR-1, y de nuevo, por definición, $[R]X$ es axioma de CP-1, lo cual, por la proposición 1 asegura que $\vdash_n [R]X$.

Paso de inducción. Como hipótesis inductiva se tiene que si la longitud de la demostración de Y en CP es menor que L entonces $\vdash_n [R]Y$.

Supóngase que la demostración de X en CP tiene longitud L mayor que 1. Se tiene entonces que X es un axioma o X es consecuencia de pasos anteriores utilizando la regla de inferencia MP. En el primer caso se procede como en el paso base resultando $\vdash_n [R]X$. En el segundo, se tienen para alguna fórmula A demostraciones de $A \rightarrow X$ y de A, ambas demostraciones de longitud menor que L. Aplicando la hipótesis inductiva resultan $\vdash_n [R](A \rightarrow X)$ y $\vdash_n [R]A$. Como en CP-n, cuando $n \geq 1$, se tiene $[R](A \rightarrow X) \rightarrow ([R]A \rightarrow [R]X)$, aplicando MP resulta $\vdash_n [R]X$.

Por el principio de inducción se ha probado que $\vdash X \Rightarrow \vdash_n [R]X$.

Para probar la segunda parte, observar que de la primera, se tiene $\vdash X \Rightarrow \vdash_n [R]X$, para $n \geq 1$, lo cual, de acuerdo a la definición de SCR-(n+1) significa $\vdash X \Rightarrow \vdash_{n+1} [R]X$, para $n \geq 1$, y por tanto, $\vdash X \Rightarrow \vdash_n [R]X$, para $n \geq 2$.

Proposición 3 (Consecuencias básicas)

En los sistemas SCR-(n+1) y CP-n con $n \geq 0$ se tienen los siguientes teoremas:

Principio de identidad: $A \rightarrow A$

Eliminación de la conjunción:

$(A \wedge B) \rightarrow A, (A \wedge B) \rightarrow B$

Introducción de la conjunción: $A \rightarrow [B \rightarrow (A \wedge B)]$

Introducción y eliminación de la conjunción en el consecuente: $[A \rightarrow (B \wedge C)] \leftrightarrow [(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)]$

Silogismo hipotético: $[(A \rightarrow B)(B \rightarrow C)] \rightarrow (A \rightarrow C)$

Importación-Exportación:

$[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \leftrightarrow [(A \wedge B) \rightarrow C]$

Equivalencia material: $[A \leftrightarrow B] \leftrightarrow [(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)]$

Además,

Creencia de la conjunción:

$\vdash_n [R](A \wedge B) \leftrightarrow ([R]A \wedge [R]B)$, para $n \geq 1$

$\Vdash_n [R](A \wedge B) \leftrightarrow ([R]A \wedge [R]B)$, para $n \geq 2$

Prueba: Los primeros siete son resultados muy conocidos de CP, y como en los sistemas SCR-(n+1) y CP-n con $n \geq 0$, se tienen los axiomas de CP y la regla de inferencia MP entonces, en cada uno de estos sistemas valen estos resultados. Para detalles de las pruebas en CP véanse a Caicedo (1990) y Hamilton (1981).

Para probar la creencia de la conjunción, se tiene, por los axiomas Ax0.6 y Ax0.7, que $(A \wedge B) \rightarrow A$ y $(A \wedge B) \rightarrow B$. Al ser axiomas de CP-0, también lo son de SCR-1, y por lo tanto $[R]((A \wedge B) \rightarrow A)$ y $[R]((A \wedge B) \rightarrow B)$ son axiomas de CP-1, y por la proposición 1 son teoremas de CP-n para $n \geq 1$. Al tener $\vdash_n [R]((A \wedge B) \rightarrow A)$ y $\vdash_n [R]((A \wedge B) \rightarrow B)$, utilizando el axioma MP[R] y MP se infieren $\vdash_n [R](A \wedge B) \rightarrow [R]A$ y $\vdash_n [R](A \wedge B) \rightarrow [R]B$. Utilizando introducción de la conjunción en el consecuente se infiere $\vdash_n [R](A \wedge B) \rightarrow ([R]A \wedge [R]B)$.

Por otro lado, de la regla introducción de la conjunción, se tiene $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$. Por la proposición 2 se infiere $\vdash_1 [R](A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)))$, y utilizando el axioma MP[R] y MP resulta $\vdash_1 [R]A \rightarrow [R](B \rightarrow (A \wedge B))$, como además por MP[R] se tiene $\vdash_1 [R](B \rightarrow (A \wedge B)) \rightarrow ([R]B \rightarrow [R](A \wedge B))$, entonces por silogismo hipotético se obtiene $\vdash_1 [R]A \rightarrow ([R]B \rightarrow [R](A \wedge B))$. Utilizando importación se infiere $\vdash_1 ([R]A \wedge [R]B) \rightarrow [R](A \wedge B)$, y por la proposición 1 se tiene finalmente que $\vdash_n ([R]A \wedge [R]B) \rightarrow [R](A \wedge B)$. Como ya se probó la recíproca, entonces, por introducción de la conjunción y equivalencia material, resulta $\vdash_n [R](A \wedge B) \leftrightarrow ([R]A \wedge [R]B)$.

Proposición 4 (Creencias como axiomas)

$[R]X$ axioma de CP-n $\Rightarrow \Vdash_n X$, para $n \geq 1$

Prueba: Supóngase que $[R]X$ axioma de CP-n. Se probará $\Vdash_n X$ haciendo inducción en n.

Paso base ($n = 1$). Si $[R]X$ es axioma de CP-1 entonces, por la definición de CP-1, X es axioma de SCR-1 o $[R]X$ es axioma de SCR-1. En el primer caso resulta que $\Vdash_1 X$. El segundo caso es imposible, ya que si $[R]X$ es axioma de SCR-1, entonces por la definición de SCR-1 también es axioma de CP-0, es decir de CP, pero los axiomas de CP no tienen la forma $[R]X$. Por lo tanto, $[R]X$ es axioma de CP-1 $\Rightarrow \Vdash_1 X$.

Paso de inducción. Como hipótesis inductiva se tiene que $[R]X$ axioma de CP-n $\Rightarrow \Vdash_n X$. Supóngase que $[R]X$ axioma de CP-(n+1), se debe probar que $\Vdash_{n+1} X$. Si $[R]X$ es axioma de CP-(n+1) entonces, por la definición de CP-(n+1), X es axioma de SCR-(n+1) o $[R]X$ es axioma de SCR-(n+1). En el primer caso resulta que $\Vdash_{n+1} X$. En el segundo caso, por la definición de SCR-(n+1), resulta que $[R]X$ es axioma de CP-n, y utilizando la hipótesis inductiva se infiere $\Vdash_n X$, lo cual por la proposición 1 genera $\Vdash_{n+1} X$. Por lo tanto, $[R]X$ axioma de CP-(n+1) $\Rightarrow \Vdash_{n+1} X$.

Por el principio de inducción se ha probado que $[R]X$ axioma de CP-n $\Rightarrow \Vdash_n X$.

Proposición 5 (*Representación interna de la creencia*)

Para R un razonador de tipo-n se tiene que:

$$\Vdash_n X \Leftrightarrow \vdash_n [R]X, \text{ con } n \geq 1$$

Además,

$$\Vdash_n X \Leftrightarrow \Vdash_{n+1} [R]X, \text{ con } n \geq 1$$

Prueba: Supóngase que $\Vdash_n X$, se probará $\vdash_n [R]X$ haciendo inducción sobre la longitud de la demostración de X en SCR-n.

Paso base. La longitud de la demostración de X en SCR-n es 1, es decir X es un axioma de SCR-n, pero si X es un axioma de SCR-n entonces, por definición, $[R]X$ es axioma de CP-n, y por lo tanto, $\vdash_n [R]X$.

Paso de inducción. Como hipótesis inductiva se tiene que si la longitud de la demostración de Y en SCR-n es menor que L entonces $\vdash_n [R]Y$.

Supóngase que la demostración de X en SCR-n tiene longitud L mayor que 1. Se tiene entonces que X es un axioma o X es consecuencia de pasos anteriores utilizando la regla de inferencia MP. En el primer caso se procede como en el paso base resultando $\vdash_n [R]X$. En el segundo caso se tienen para alguna fórmula A demostraciones de $A \rightarrow X$ y de A, ambas demostraciones de longitud menor que L. Aplicando la hipótesis inductiva resultan $\vdash_n [R](A \rightarrow X)$ y $\vdash_n [R]A$. Como en CP-n se tiene como axioma MP[R]: $\vdash_n [R](A \rightarrow X) \rightarrow ([R]A \rightarrow [R]X)$, aplicando dos veces la regla MP resulta $\vdash_n [R]X$.

Por el principio de inducción se ha probado que $\Vdash_n X \Rightarrow \vdash_n [R]X$.

Para probar la recíproca supóngase que $\vdash_n [R]X$, se probará $\Vdash_n X$ haciendo inducción sobre la longitud de la demostración de $[R]X$ en CP-n.

Paso base. La longitud de la demostración de $[R]X$ en CP-n es 1, es decir $[R]X$ es un axioma de CP-n, y utilizando la proposición 4 resulta $\Vdash_n X$.

Paso de inducción. Como hipótesis inductiva se tiene que si la longitud de la demostración de $[R]Y$ en CP-n es menor que L entonces $\Vdash_n Y$.

Supóngase que la demostración de $[R]X$ en CP-n tiene longitud L mayor que 1. Se tiene entonces que $[R]X$ es un axioma o $[R]X$ es consecuencia de pasos anteriores utilizando la regla de inferencia MP. En el primer caso se procede como en el paso base resultando $\Vdash_n X$. En el segundo caso $[R]X$, si $[R]X$ no es un axioma, sólo puede ser obtenida por el uso del axioma MP[R]: $[R](A \rightarrow X) \rightarrow ([R]A \rightarrow [R]X)$ para alguna fórmula A, y para inferir $[R]X$ se requieren demostraciones de $[R](A \rightarrow X)$ y de $[R]A$, ambas demostraciones de longitud menor que L. Aplicando la hipótesis inductiva resultan $\Vdash_n A \rightarrow X$ y $\Vdash_n A$, aplicando MP se infiere $\Vdash_n X$.

Por el principio de inducción se ha probado que $\vdash_n [R]X \Rightarrow \Vdash_n X$.

Al tener $(\Vdash_n X \Rightarrow \vdash_n [R]X)$ y $(\vdash_n [R]X \Rightarrow \Vdash_n X)$ se concluye $(\Vdash_n X \Leftrightarrow \vdash_n [R]X)$

Por la definición de SCR-(n+1), la segunda parte de la proposición se sigue de la primera.

De la Creencia al Conocimiento

Proposición 6 (Teorema de deducción)

$$(P_1, \dots, P_k \Vdash_n C) \Leftrightarrow \Vdash_n (P_1 \wedge \dots \wedge P_k \rightarrow C)$$

$$(P_1, \dots, P_k \vdash_n C) \Leftrightarrow \vdash_n (P_1 \wedge \dots \wedge P_k \rightarrow C)$$

Prueba: Es un resultado bien conocido que en cualquier sistema deductivo que tenga como única regla de inferencia MP y que incluya como teoremas $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ y $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$, vale el teorema de deducción (Caicedo, 1990). Cada uno de los sistemas de las jerarquías CP-n y SCR-(n+1) con $n \geq 0$ satisfacen los requerimientos, puesto que los tienen como axiomas.

Definición 1

Sea R un razonador de tipo-n, SCR-n su sistema de creencias y CP-n el cálculo proposicional asociado a su sistema de creencias:

Se tiene que un razonador R cree (o acepta) X, denotado $\Vdash_n X$ si y solamente si X es un teorema del sistema SCR-n, lo cual, según la proposición 5, significa $\vdash_n [R]X$. En resumen,

$$R \text{ cree (o acepta) } X \Leftrightarrow \Vdash_n X \Leftrightarrow \vdash_n [R]X$$

Se dice que un razonador R sabe (o conoce) X, denotado $\vdash_n [[R]]X$ si y solamente si el razonador cree X y además X es cierta, es decir si $\Vdash_n X$ y $\vdash_n X$, lo cual según la proposición 5 significa $\vdash_n [R]X$ y $\vdash_n X$, y por introducción de la conjunción resulta $\vdash_n [R]X \wedge X$. Por lo tanto,

$$R \text{ sabe (o conoce) } X \Leftrightarrow \vdash_n [[R]]X \Leftrightarrow (\Vdash_n X \text{ y } \vdash_n X) \\ \Leftrightarrow \vdash_n [R]X \wedge X$$

También se tiene que

$$R \text{ cree que acepta } X \Leftrightarrow \Vdash_n [R]X \Leftrightarrow \vdash_n [R][R]X$$

Un razonador R sabe que acepta X si y solamente si $\vdash_n [[R]][R]X$, lo cual significa $\Vdash_n [R]X$ y $\Vdash_n X$,¹ y por introducción de la conjunción resulta $\Vdash_n X \wedge [R]X$, es decir si acepta X y cree que acepta X. Por lo tanto,

$$R \text{ sabe que acepta } X \Leftrightarrow \vdash_n [[R]][R]X \Leftrightarrow \\ (\Vdash_n [R]X \text{ y } \Vdash_n X) \Leftrightarrow \Vdash_n X \wedge [R]X$$

Proposición 7 (Tipo-(n+1) sabe que acepta creencias tipo-n)

Un razonador R de tipo-(n+1) sabe que acepta las creencias de un razonador de tipo-n.

$$\Vdash_n X \Leftrightarrow \vdash_{n+1} [[R]][R]X, \text{ para } n \geq 1$$

Además,

$$\Vdash_n X \Rightarrow (\Vdash_{n+1} X \text{ y } \Vdash_{n+1} [R]X), \text{ para } n \geq 1$$

$$\Vdash_t X \Rightarrow (\Vdash_n X \text{ y } \Vdash_n [R]X), \text{ para } 1 \leq t < n$$

Prueba: Supóngase que $\Vdash_n X$, se probará $\vdash_{n+1} [[R]][R]X$ haciendo inducción sobre la longitud de la demostración de X en SCR-n.

Paso base. La longitud de la demostración de X en SCR-n es 1, es decir X es un axioma de SCR-n, y por la definición de CP-n, X y [R]X son axiomas de CP-n, y por la definición de SCR-(n+1), X y [R]X son axiomas de SCR-(n+1). Se tiene entonces $\Vdash_{n+1} X$ y $\Vdash_{n+1} [R]X$, lo cual, por la definición 1, significa $\vdash_{n+1} [[R]][R]X$.

Paso de inducción. Como hipótesis inductiva se tiene que si la longitud de la demostración de Y en SCR-n es menor que L entonces $\Vdash_n Y \Rightarrow \vdash_{n+1} [[R]][R]Y$, lo cual según la definición 1 significa $\Vdash_n Y \Rightarrow (\Vdash_{n+1} [R]Y \text{ y } \Vdash_{n+1} Y)$.

Supóngase que la demostración de X en SCR-n tiene longitud L mayor que 1. Se tiene entonces que X es un axioma o X es consecuencia de pasos anteriores utilizando la regla de inferencia MP, $Z \rightarrow X$, $Z \Vdash_n X$. En el primer caso se procede como en el

¹ Para un razonador de tipo-n se tiene la siguiente cadena de equivalencias: $\Vdash_n [R]X \text{ y } \Vdash_n X \Leftrightarrow \vdash_n [R]X \wedge X \Leftrightarrow (\text{def}) \vdash_n [[R]]X$ (R cree que sabe en cierta forma X) $\Leftrightarrow \vdash_n [R][R]X$, y por lo tanto $\vdash_n [[R]][R]X \Leftrightarrow \vdash_n [R][R]X$.

paso base resultando $\vdash_{n+1} [[R]] [R]X$. En el segundo, se tienen demostraciones de las fórmulas $Z \rightarrow X$ y Z en SCR-n, ambas demostraciones de longitud menor que L . Aplicando la hipótesis inductiva resultan $\Vdash_{n+1} Z \rightarrow X$, $\Vdash_{n+1} Z$, $\Vdash_{n+1} [R](Z \rightarrow X)$ y $\Vdash_{n+1} [R]Z$. Como en CP-n ($n \geq 1$) vale MP[R], $\vdash_n [R](Z \rightarrow X) \rightarrow ([R]Z \rightarrow [R]X)$, y por la definición de SCR-(n+1) resulta $\Vdash_{n+1} [R](Z \rightarrow X) \rightarrow ([R]Z \rightarrow [R]X)$. Al tener $\Vdash_{n+1} Z \rightarrow X$, $\Vdash_{n+1} Z$ por MP se infiere $\Vdash_{n+1} X$, y al tener $\Vdash_{n+1} [R](Z \rightarrow X) \rightarrow ([R]Z \rightarrow [R]X)$, $\Vdash_{n+1} [R](Z \rightarrow X)$ y $\Vdash_{n+1} [R]Z$ por MP se infiere $\Vdash_{n+1} [R]X$. Finalmente, de estas dos últimas inferencias, por la definición 1, se obtiene $\vdash_{n+1} [[R]] [R]X$.

Por el principio de inducción se han probado que $\Vdash_n X \Rightarrow \vdash_{n+1} [[R]] [R]X$, para $n \geq 1$.

La segunda parte se sigue de la primera al aplicar la definición de 'sabe que acepta'. Para la prueba de la tercera parte, observar que de la segunda se obtiene $\Vdash_t X \Rightarrow (\Vdash_{t+1} X, \Vdash_{t+1} [R]X, \Vdash_{t+2} X, \Vdash_{t+2} [R]X, \dots)$, para $t \geq 1$, y por lo tanto, $\Vdash_t X \Rightarrow (\Vdash_n X \text{ y } \Vdash_n [R]X)$, para $1 \leq t < n$.

Saber que se aplican las Reglas

Definición 2

Sea R un razonador de tipo-n, SCR-n su sistema de creencias y CP-n el cálculo proposicional asociado a su sistema de creencias.

Para la regla $(P_1, \dots, P_k \therefore C)$ se dice que cada uno de los P_j es una *premisa* y que C es la *conclusión*.

$(P_1, \dots, P_k \therefore C)$ es una *regla de inferencia* sí y solamente si $(P_1, \dots, P_k \vdash_n C)$, lo cual, gracias al teorema de deducción, significa $\vdash_n (P_1 \wedge \dots \wedge P_k) \rightarrow C$. Por lo tanto,

$$(P_1, \dots, P_k \therefore C) \text{ es una regla de inferencia} \Leftrightarrow \vdash_n (P_1 \wedge \dots \wedge P_k) \rightarrow C$$

El razonador R *crea la regla* $(P_1, \dots, P_k \therefore C)$ sí y solamente si $\vdash_n [R]((P_1 \wedge \dots \wedge P_k) \rightarrow C)$, es decir $\Vdash_n (P_1 \wedge \dots \wedge P_k) \rightarrow C$, lo cual significa $(P_1, \dots, P_k \Vdash_n C)$. Por lo tanto,

$$R \text{ crea la regla } (P_1, \dots, P_k \therefore C) \Leftrightarrow \Vdash_n (P_1 \wedge \dots \wedge P_k) \rightarrow C \Leftrightarrow \vdash_n [R]((P_1 \wedge \dots \wedge P_k) \rightarrow C)$$

El razonador R *aplica la regla* $(P_1, \dots, P_k \therefore C)$ sí y solamente si cada vez que R acepta las premisas también acepta la conclusión, es decir $([R]P_1, \dots, [R]P_k \vdash_n [R]C)$, por lo que, según el teorema de deducción, $\vdash_n ([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R]C$. Por lo tanto,

$$R \text{ aplica la regla } (P_1, \dots, P_k \therefore C) \Leftrightarrow \vdash_n ([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R]C$$

Observar que si un razonador R *crea la regla* $(P_1, \dots, P_k \therefore C)$, es decir $\vdash_n [R]((P_1 \wedge \dots \wedge P_k) \rightarrow C)$, entonces, utilizando MP[R] resulta $\vdash_n [R](P_1 \wedge \dots \wedge P_k) \rightarrow [R]C$, y como por la proposición 3, creencia de la conjunción, se tiene que $\vdash_n [R](P_1 \wedge \dots \wedge P_k) \Leftrightarrow ([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k)$, entonces, $\vdash_n ([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R]C$, es decir, R *aplica la regla* $(P_1, \dots, P_k \therefore C)$. Por lo que,

$$R \text{ crea la regla } (P_1, \dots, P_k \therefore C) \Rightarrow R \text{ aplica la regla } (P_1, \dots, P_k \therefore C)$$

El razonador R *sabe (o conoce) la regla* $(P_1, \dots, P_k \therefore C)$ sí y solamente si $(P_1, \dots, P_k \therefore C)$ es una regla de inferencia que el razonador cree, es decir $(P_1, \dots, P_k \vdash_n C)$ y $(P_1, \dots, P_k \Vdash_n C)$, por lo que, según el teorema de deducción, $\vdash_n (P_1 \wedge \dots \wedge P_k) \rightarrow C$ y $\Vdash_n (P_1 \wedge \dots \wedge P_k) \rightarrow C$, y por representación interna de la creencia se obtiene $\vdash_n (P_1 \wedge \dots \wedge P_k) \rightarrow C$ y $\vdash_n [R](P_1 \wedge \dots \wedge P_k) \rightarrow C$, resultando según la definición 1 que $\vdash_n [[R]]((P_1 \wedge \dots \wedge P_k) \rightarrow C)$. Por lo tanto,

$$R \text{ sabe (o conoce) la regla } (P_1, \dots, P_k \therefore C) \Leftrightarrow \vdash_n [[R]]((P_1 \wedge \dots \wedge P_k) \rightarrow C) \Leftrightarrow \vdash_n (P_1 \wedge \dots \wedge P_k) \rightarrow C \text{ y } \Vdash_n (P_1 \wedge \dots \wedge P_k) \rightarrow C.$$

El razonador R *crea que aplica la regla* $(P_1, \dots, P_k \therefore C)$ sí y solamente si el razonador cree que cuando acepta las premisas también acepta la conclusión, es decir, $([R]P_1, \dots, [R]P_k \Vdash_n [R]C)$, por lo que, según el teorema de deducción, $\Vdash_n ([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R]C$, resultando $\vdash_n [R]([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R]C$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 & R \text{ cree que aplica la regla } (P_1, \dots, P_k \vdash C) \Leftrightarrow \Vdash_n \\
 & ([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R]C \\
 & \Leftrightarrow \vdash_n [R]([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R]C
 \end{aligned}$$

El razonador R sabe que aplica la regla $(P_1, \dots, P_k \vdash C)$ sí y solamente si R cree que aplica la regla y realmente la aplica, es decir, $\Vdash_n ([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R]C$ y $\vdash_n ([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R]C$, lo cual significa $\vdash_n [R]([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R]C$ y $\vdash_n ([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R]C$, por lo que $\vdash_n [[R]]([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R]C$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 & R \text{ sabe que aplica } (P_1, \dots, P_k \vdash C) \\
 & \Leftrightarrow \vdash_n [[R]]([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R]C \\
 & \Leftrightarrow (\Vdash_n ([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R]C) \text{ y} \\
 & \vdash_n ([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R]C
 \end{aligned}$$

Proposición 8 (Tipo-(n+1) sabe que aplica reglas tipo-n)

Un razonador de tipo-(n+1) sabe que aplica las reglas de inferencia que cree un razonador de tipo-n. En particular sabe que aplica *modus ponens*.

$$(P_1, \dots, P_k \Vdash_n C) \Rightarrow \vdash_{n+1} [[R]]([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R]C, \text{ para } n \geq 1$$

En particular,

$$\vdash_{n+1} [[R]]([R](X \rightarrow Y) \wedge [R]X) \rightarrow [R]Y, \text{ para } n \geq 1$$

Prueba: Para la primera parte, supóngase que $(P_1, \dots, P_k \Vdash_n C)$. Se probará $\vdash_{n+1} [[R]]([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R]C$, haciendo inducción sobre la longitud de la prueba de C en SCR-n .

Paso base. La longitud de la prueba de C en SCR-n es 1, esto significa que C es P_j para algún j , $1 \leq j \leq k$, o C es un axioma de SCR-n . En el primer caso, como en CP-(n+1) y en SCR-(n+1) se tiene el principio de identidad $[R]C \rightarrow [R]C$, entonces, en estos sistemas también se tiene $[R]P_j \rightarrow [R]C$, y como por eliminación de la conjunción se tiene $([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R]P_j$, por silogismo hipotético resulta $([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R]C$ en ambos sistemas, lo que, por la definición 1, significa $\vdash_{n+1} [[R]]([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R]C$.

... $\wedge [R]P_k) \rightarrow [R]C$. En el segundo caso, al ser C un axioma de SCR-n , por definición $[R]C$ debe ser un axioma de CP-n y por la proposición 1 también de CP-(n+1) y, además, $[R]C$ es un axioma de SCR-(n+1) , por lo que $\vdash_{n+1} [R]C$ y $\Vdash_{n+1} [R]C$. Utilizando Ax0.1 y MP se infieren $\vdash_{n+1} ([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R]C$ y $\Vdash_{n+1} ([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R]C$, resultando, por la definición 1, que $\vdash_{n+1} [[R]]([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R]C$.

Paso de inducción. Como hipótesis inductiva se tiene que si la longitud de la demostración de Z en SCR-n es menor que L , entonces $(P_1, \dots, P_k \Vdash_n Z) \Rightarrow \vdash_{n+1} [[R]]([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R]Z$, es decir $(P_1, \dots, P_k \Vdash_n Z) \Rightarrow \vdash_{n+1} ([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R]Z$ y $\Vdash_{n+1} ([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R]Z$.

Supóngase que la demostración de C en SCR-n es de longitud L mayor que 1. Se tiene entonces que C es un axioma de SCR-n o C es P_j para algún j , $1 \leq j \leq k$, o C es consecuencia de pasos anteriores utilizando MP . En los dos primeros casos se procede como en el paso base. En el tercer caso, C es el resultado de aplicar MP ($Y \rightarrow C$, $Y \Vdash_n C$), teniendo las demostraciones de $Y \rightarrow C$ y Y en SCR-n , ambas demostraciones de longitud menor que L . Aplicando la hipótesis inductiva, resultan $\vdash_{n+1} ([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R](Y \rightarrow C)$, $\vdash_{n+1} ([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R]Y$, $\Vdash_{n+1} ([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R](Y \rightarrow C)$, $\Vdash_{n+1} ([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R]Y$. Se tiene, entonces, que en SCR-(n+1) y en CP-(n+1) de $[R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k$ se infieren $[R](Y \rightarrow C)$ y $[R]Y$, utilizando MP y $\text{MP}[R]$, $[R](Y \rightarrow C) \rightarrow ([R]Y \rightarrow [R]C)$ (vale en SCR-(n+1) cuando $n \geq 1$), resulta que de $[R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k$ se infieren $[R]C$, lo cual, por el teorema de deducción, genera $\Vdash_{n+1} ([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R]C$ y $\vdash_{n+1} ([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R]C$. Por la definición 1 se concluye $\vdash_{n+1} [[R]]([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R]C$.

Por el principio de inducción se ha probado que $(P_1, \dots, P_k \Vdash_n C) \Rightarrow \vdash_{n+1} [[R]]([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R]C$.

La segunda parte de la proposición es un caso particular de la primera cuando se aplica a la regla de inferencia MP .

Conciencia del Tipo de Razonamiento

Definición 3

Sea R un razonador de tipo- n , $SCR-n$ su sistema de creencias y $CP-n$ el cálculo proposicional asociado a su sistema de creencias.

El razonador R cree que es de tipo- t sí y solamente si R cree que acepta los teoremas de $SCR-t$ y cree que aplica las reglas de inferencia de $SCR-t$, es decir

R cree que es de tipo- $t \Leftrightarrow$

$$(\models_t A \Rightarrow \models_n [R]A) \text{ y } \{(P_1, \dots, P_k \models_t C) \Rightarrow \models_n ([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R]C\}$$

El razonador R sabe que es de tipo- t sí y solamente si R cree que es tipo- t y realmente R es tipo- t , es decir, cree que acepta los teoremas de $SCR-t$ y realmente los acepta y además cree que aplica las reglas de inferencia de $SCR-t$ y realmente las aplica, por lo que R sabe que acepta los teoremas de $SCR-t$ y sabe que aplica las reglas de inferencia de $SCR-t$. Por lo tanto,

R sabe que es de tipo- $t \Leftrightarrow$

$$(\models_t A \Rightarrow \models_n [R]A \text{ y } \models_n A) \text{ y } \{(P_1, \dots, P_k \models_t C) \Rightarrow \models_n ([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R]C \text{ y } \vdash_n ([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R]C\}$$

R sabe que es de tipo- $t \Leftrightarrow$

$$(\models_t A \Rightarrow \vdash_n [[R]] [R]A) \text{ y } \{(P_1, \dots, P_k \models_t C) \Rightarrow \vdash_n [[R]] ([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R]C\}$$

Proposición 9 (Tipo- $(n+1)$ sabe que es tipo- n)

Un razonador de tipo- $(n+1)$ sabe que es de tipo- n . Es decir, un razonador de tipo- $(n+1)$ sabe que cree los teoremas de $SCR-n$ y sabe que aplica las reglas de inferencia de $SCR-n$.

$$\models_n X \Rightarrow \vdash_{n+1} [[R]] [R]X$$

$$(P_1, \dots, P_k \models_n C) \Rightarrow \vdash_{n+1} [[R]] ([R]P_1 \wedge \dots \wedge [R]P_k) \rightarrow [R]C$$

Prueba: son las proposiciones 7 y 8.

Definición 4

El sistema de *lógica modal* K es axiomatizado por los axiomas del cálculo proposicional clásico CP y el *axioma* K : $[R](A \rightarrow B) \rightarrow ([R]A \rightarrow [R]B)$; los teoremas son generados a partir de los axiomas utilizando dos reglas de inferencia: la primera es la *regla MP*: $(A \rightarrow B, A \therefore B)$ y la segunda es la *regla* $[R]$: $(A \therefore [R]A)$.

Definición 5

El sistema de $SCR-\omega$, sistema de creencias de un razonador R de tipo- ω , tiene como única regla de inferencia primitiva el *modus ponens* y es axiomatizado de la siguiente manera:

A es un axioma de $SCR-\omega \Leftrightarrow$

A axioma de $SCR-n$ para algún $n \geq 1$

El sistema de $CP-\omega$, *cálculo proposicional asociado al sistema de creencias de un razonador* R de tipo- ω , tiene como única regla de inferencia primitiva el *modus ponens* y es axiomatizado de la siguiente manera:

A es un axioma de $CP-\omega \Leftrightarrow A$ axioma de $CP-n$ para algún $n \geq 0$

Proposición 10 (Axiomatización explícita de $SCR-n$)

Para cada $n \geq 1$, el sistema $SCR-(n+1)$ puede ser axiomatizado de la siguiente manera:²

X es axioma de $CP \Rightarrow [R]^j X$ es axioma de $SCR-(n+1)$, para cada j , $0 \leq j \leq n$

$[R]^t ([R](X \rightarrow Y) \rightarrow ([R]X \rightarrow [R]Y))$ es axioma de $SCR-(n+1)$, para $0 \leq t < n$

Como única regla de inferencia se tiene MP .

² $[R]^0 A = A$, $[R]^1 A = [R]A$ y $[R]^{n+1} A = [R][R]^n A$ donde $n \geq 1$.

Prueba: Se hace inducción en n .

Para el paso base, supóngase que $n = 1$. Si X es un axioma de CP, es decir de CP-0, entonces X también es axioma de SCR-1, y por lo tanto X y $[R]X$ son axiomas de CP-1, es decir X y $[R]X$ son axiomas de SCR-2. Se ha probado que cuando $n = 1$, entonces,

X es axioma de CP $\Rightarrow [R]^j X$ es axioma de SCR- $(n+1)$, para cada j , $0 \leq j \leq n$

También se sabe que $[R](X \rightarrow Y) \rightarrow ([R]X \rightarrow [R]Y)$ es axioma de CP-1, lo cual significa que también es axioma de SCR-2. Se ha probado, entonces, que cuando $n = 1$ y, por tanto,

$[R]^t([R](X \rightarrow Y) \rightarrow ([R]X \rightarrow [R]Y))$ es axioma de SCR- $(n+1)$, para $0 \leq t < n$

Para el paso de inducción, supóngase que el resultado vale para $n=m$, y se probará para $n=m+1$. Si X es un axioma de CP, por la hipótesis inductiva se tiene que $[R]^j X$ es axioma de SCR- $(m+1)$, para cada j , $0 \leq j \leq m$, por lo que $[R]^j X$ y $[R][R]^j X$ son axiomas de CP- $(m+1)$, para cada j , $0 \leq j \leq m$, es decir, son axiomas de SCR- $(m+2)$. Lo anterior significa que $[R]^j X$ es axioma de SCR- $(m+2)$, para cada j , $0 \leq j \leq m+1$. Se ha probado que cuando $n = m+1$, entonces,

X es axioma de CP $\Rightarrow [R]^j X$ es axioma de SCR- $(n+1)$, para cada j , $0 \leq j \leq n$

También, por la hipótesis inductiva, se tiene que $[R]^t([R](X \rightarrow Y) \rightarrow ([R]X \rightarrow [R]Y))$ es axioma de SCR- $(m+1)$, para $0 \leq t < m$, y por lo tanto, $[R][R]^t([R](X \rightarrow Y) \rightarrow ([R]X \rightarrow [R]Y))$ y $[R]^t([R](X \rightarrow Y) \rightarrow ([R]X \rightarrow [R]Y))$ son axiomas de CP- $(m+1)$, para $0 \leq t < m$, es decir, son axiomas de SCR- $(m+2)$. Se tiene, de esta forma, que $[R]^t([R](X \rightarrow Y) \rightarrow ([R]X \rightarrow [R]Y))$ es axioma de SCR- $(m+2)$, para $0 \leq t < m+1$. Se ha probado que cuando $n = m+1$, entonces,

$[R]^t([R](X \rightarrow Y) \rightarrow ([R]X \rightarrow [R]Y))$ es axioma de SCR- $(n+1)$, para $0 \leq t < n$

Por el principio de inducción matemática, queda probada la proposición.

Proposición 11 (*Axiomatización explícita de CP- n*)

Para cada $n \geq 1$, el sistema CP- n puede ser axiomatizado de la siguiente manera:

X es axioma de CP $\Rightarrow [R]^j X$ es axioma de CP- n , para cada j , $0 \leq j \leq n$

$[R]^t([R](X \rightarrow Y) \rightarrow ([R]X \rightarrow [R]Y))$ es axioma de CP- n , para cada t , $0 \leq t < n$

Como única regla de inferencia se tiene MP.

Prueba: Consecuencia inmediata de la proposición anterior, al tener en cuenta que SCR- $(n+1)$ coincide con CP- n .

Proposición 12 (*Equivalencia de SCR- ω , CP- ω y K*)

Los sistemas K, SCR- ω y CP- ω generan el mismo conjunto de teoremas.

Prueba: Sea X un axioma de SCR- ω , por lo que existe un n , tal que X es un axioma de SCR- $(n+1)$. Es decir, según la proposición 10, X tiene la forma $[R]^j Z$ para algún j , $0 \leq j \leq n$, donde Z es un axioma de CP, o X tiene la forma $[R]^t([R](Z \rightarrow Y) \rightarrow ([R]Z \rightarrow [R]Y))$ para algún t , $0 \leq t < n$. En el primer caso, si Z es un axioma de CP, entonces Z es un axioma de K, y aplicando j veces la regla $[R]$ resulta que $[R]^j Z$ es un teorema de K, es decir X es un teorema de K. En el segundo caso, puesto que $[R](Z \rightarrow Y) \rightarrow ([R]Z \rightarrow [R]Y)$ es un axioma de K, y aplicando t veces la regla $[R]$ resulta que $[R]^t([R](Z \rightarrow Y) \rightarrow ([R]Z \rightarrow [R]Y))$ es un teorema de K. Se tiene, entonces, que los axiomas de SCR- ω son teoremas de K, por lo tanto, puesto que la única regla de inferencia de SCR- ω también es regla de inferencia de K, se concluye que, los teoremas de SCR- ω son teoremas de K.

Sea X un axioma de K, por lo que X es un axioma de CP o X es de la forma $[R](Z \rightarrow Y) \rightarrow ([R]Z \rightarrow [R]Y)$, en

ambos casos X es un axioma de $SCR-\omega$. Además, si X es un teorema de $SCR-\omega$, entonces X es un teorema de $SCR-n$ para algún n , y por lo tanto, de acuerdo a la proposición 5, $[R]X$ es un teorema de $SCR-(n+1)$, es decir, $[R]X$ es un teorema de $SCR-\omega$. Se tiene, entonces, que en $SCR-\omega$ vale la regla $[R]$. Resulta, de esa forma, que en $SCR-\omega$ valen los axiomas y las reglas de inferencia del sistema K . Por lo tanto, los teoremas de K son teoremas de $SCR-\omega$.

Se ha probado que los teoremas de $SCR-\omega$ son teoremas de K y que los teoremas de K son teoremas de $SCR-\omega$. Se concluye que K y $SCR-\omega$ tienen el mismo conjunto de teoremas.

Por otro lado, puesto que los sistemas $SCR-(n+1)$ y $CP-n$ coinciden, entonces los sistemas $SCR-\omega$ y $CP-\omega$ también coinciden.

Definición 6

La *profundidad* $P(A)$ de una fórmula A , es un entero no negativo que se encuentra utilizando las siguientes reglas:

$P(A) = 0$ si A es una fórmula atómica

$P(A*B) = \text{máximo de } \{P(A), P(B)\}$, donde $*$ es uno de los conectivos $\rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee$

$P(\neg A) = P(A)$

$P([R]A) = P(A) + 1$

Un sistema deductivo S tiene *profundidad* p si y solamente si p es el máximo valor del conjunto $\{k : k \text{ es la profundidad de } A, \text{ donde } A \text{ es un teorema de } S\}$. Cuando tal máximo no existe, se dice que la profundidad del sistema es *infinita*.

Proposición 13 (*Profundidad de SCR-n y CP-n*)

Para cada $n \geq 0$, la profundidad de $SCR-(n+1)$ es n y la profundidad de $CP-n$ es n .

Prueba: Como consecuencia de las proposiciones 10 y 11, donde se presentan axiomatizaciones

explícitas de los sistemas $SCR-(n+1)$ y $CP-n$, se infiere que la profundidad máxima de los axiomas es n . Además, como la única regla de inferencia, *modus ponens*, no incrementa la profundidad, se concluye que la profundidad de los sistemas $SCR-(n+1)$ y $CP-n$ es n .

Proposición 14 (*Profundidad de SCR- ω y CP- ω*)

La profundidad de $SCR-\omega$ y de $CP-\omega$ es infinita.

Prueba: Si $SCR-\omega$ tiene profundidad k , entonces existe un teorema A del sistema tal que la profundidad de A es k , pero esto es imposible ya que si A es un teorema de $SCR-\omega$, entonces A es teorema de $SCR-n$ para algún n , por lo que $[R]A$ es teorema de $SCR-(n+1)$ y por lo tanto también teorema de $SCR-\omega$, resultando de esta forma que $SCR-\omega$ es de profundidad k pero tiene un teorema de profundidad $k+1$. Por lo tanto, la profundidad de $SCR-\omega$ es infinita. Como los sistemas $SCR-\omega$ y $CP-\omega$ coinciden, entonces la profundidad de $CP-\omega$ también es infinita.

Definición 7

Un razonador de tipo- t es *autoconciente* si y solamente si el razonador sabe que es de tipo- t .

Proposición 15 (*Los razonadores de tipo- n no son autoconcientes*)

Para cada $n \geq 1$, los razonadores de tipo- n no son autoconcientes, es decir, un razonador de tipo- n no sabe que es de tipo- n .

Prueba: Como para $n \geq 1$, la profundidad de $SCR-n$ es $n-1$, por lo que existe en $SCR-n$ al menos un teorema X de profundidad $n-1$. Si el razonador cree que es de tipo- n , entonces $[R]X$ debe ser un teorema de $SCR-n$, lo cual es imposible ya que $[R]X$ tiene profundidad n . Por lo tanto, un razonador de tipo- n no cree que acepta los teoremas, es decir no cree que es de tipo- n , y si no lo cree entonces no lo sabe.

Proposición 16 (*Los razonadores de tipo- ω no son autoconcientes*)

Los razonadores de tipo- ω no son autoconcientes, es decir, un razonador de tipo- ω no sabe que es de tipo- ω .

Prueba: Como el sistema $\text{SCR-}\omega$ es el mismo sistema K , entonces se tiene como regla de inferencia la regla $[R]: (X \vdash [R]X)$. Si el razonador cree que es de tipo- ω entonces debe creer que aplica la regla $[R]$, es decir $[R]X \rightarrow [R][R]X$ debe ser un teorema del sistema K , lo cual no es el caso ya que el sistema K se encuentra caracterizado por los marcos sin ninguna restricción sobre la relación de accesibilidad, y si $[R]X \rightarrow [R][R]X$ es un teorema del sistema entonces la relación de accesibilidad de los marcos que caracterizan el sistema debe ser transitiva (para los detalles véase Hughes y Cresswell, 1973). Por lo tanto, un razonador de tipo- ω no cree que aplica las reglas de inferencia, es decir, no cree que es de tipo- ω , y si no lo cree entonces no lo sabe.

Definición 8

El sistema de lógica modal $K4$ (o $\text{SCR-}\omega4$ o $\text{CP-}\omega4$) se construye como una extensión del sistema K (o $\text{SCR-}\omega$ o $\text{CP-}\omega$), al agregarle el axioma 4: $[R]X \rightarrow [R][R]X$.

Proposición 17 (*Autoconciencia de los razonadores de tipo- $\omega4$*)

Los razonadores de tipo- $\omega4$ son autoconcientes, es decir, un razonador de tipo- $\omega4$ sabe que es de tipo- $\omega4$.

Prueba: Si X es un teorema de $\text{SCR-}\omega4$, entonces $[R]X$ también lo es, y por lo tanto en $\text{CP-}\omega4$ se deriva $[[R]][R]X$, resulta de esta manera que un razonador de tipo- $\omega4$ sabe que acepta los teoremas de un razonador de tipo- $\omega4$.

Para mostrar que un razonador de tipo- $\omega4$ sabe que aplica las reglas de inferencia que cree un razonador de tipo- $\omega4$, se procede como en la proposición 8, quedando pendiente por analizar el caso en el que la regla de inferencia sea la regla $[R]: (X \vdash [R]X)$, en este caso como en $\text{SCR-}\omega4$ y $\text{CP-}\omega4$ se tiene el axioma 4: $[R]X \rightarrow [R][R]X$, resulta que $\vdash_{\omega4} [[R]]([R]X \rightarrow [R][R]X)$.

Como el razonador de tipo- $\omega4$ sabe que acepta los teoremas de un razonador de tipo- $\omega4$, y sabe que aplica las reglas de inferencia que cree un razonador de tipo- $\omega4$, se concluye que el razonador de tipo- $\omega4$ sabe que es de tipo- $\omega4$.



Conclusiones

Cuando se tiene un razonador de tipo- n , la noción de profundidad del sistema $\text{SCR-}n$, en cierto sentido, mide la capacidad del razonador para hacer inferencias en lo que respecta al operador de creencia; es decir, razonadores de distinto tipo tienen diferente poder de razonamiento y este poder de razonamiento puede ser medido. Lo anterior puede ser útil en el modelamiento de agentes, puesto que a partir de las limitaciones reales del agente, podría determinarse su poder de razonamiento, es decir, su tipo, y por lo tanto decidir con cuál sistema de la jerarquía $\text{SCR-}n$ con $n \geq 1$ se debe iniciar su modelamiento. Por otro lado, las metodologías utilizadas en la teoría de la correspondencia (Chellas, 1980), para construir sistemas modales basados en la lógica modal K los cuales deban satisfacer ciertas características semánticas, pueden ser también utilizadas para construir sistemas similares basados en las lógicas de la jerarquía $\text{SCR-}n$ con $n \geq 1$. Como resultado de lo anterior, se podrían tener sistemas de lógicas doxásticas y epistémicas en los cuales el problema de la omnisciencia lógica pueda ser parcialmente controlado.

Bibliografía

Caicedo, X. (1990) *Elementos de lógica y calculabilidad*. Bogotá: Universidad de los Andes.

Chellas, B. (1980) *Modal logic: an introduction*. Cambridge: Cambridge University Press.

Freund, M. (1995). "Lógica epistémica". En: *Enciclopedia iberoamericana de filosofía*, Vol. 7. Madrid: Trotta. pp. 205-214.

Goldblatt, R. (1992) *Logics of time and computation*. Stanford: CSLI.

Hamilton, A. (1981) *Lógica para matemáticos*. Madrid: Paraninfo.

Hughes, G. y Cresswell, M. (1973) *Introducción a la lógica modal*. Madrid: Tecnos.

Lenzen, W. (1978) *Recent work in epistemic logic*. Amsterdam: North Holland.

Smullyan, R. (1995) *Juegos por siempre misteriosos*. Barcelona: Gedisa.